Mathe · Überblick

Analytische Geometrie

Alles Wichtige auf zwei Seiten · gA und eA

Im Abitur 2027

gA: Vektoren, Geraden und Ebenen in Parameterform, Lage von Geraden, Winkel. eA zusätzlich: Koordinatenform, Lage von Ebenen, Abstände. Schrägbilder mit Matrizen sind 2027 nicht dran.

Rechnen mit Vektoren

Ein Vektor ist eine **Verschiebung**: Richtung und Länge. Punkte gibt man als Ortsvektoren an.

Was?	So geht's
Vektor von A nach B	$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ (Spitze minus Fuß)
Länge	$\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}$
Mittelpunkt von AB	$\vec{m} = ½ \cdot (\vec{a} + \vec{b})$
kollinear (parallel)	$\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ für eine Zahl k

Typisch im Abi

Viereck, Pyramide oder Dach im Koordinatensystem. Erst alle Punkte ablesen, dann die Vektoren bilden.

Das Skalarprodukt

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ Das Ergebnis ist eine **Zahl**, kein Vektor.

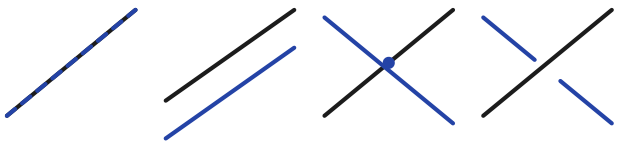
- Senkrecht (orthogonal) genau dann, wenn Skalarprodukt = 0. Das ist der wichtigste Test der ganzen Geometrie.
- Winkel zwischen zwei Vektoren: $\cos\varphi = \vec{a} \cdot \vec{b} \,/\, (\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert)$
- Geometrisch: Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ mal Länge von $\vec{b}$.

Rechte Winkel im Dreieck

Prüfen, ob zwei Seiten senkrecht stehen: Skalarprodukt der beiden Seitenvektoren ausrechnen.

Geraden und ihre Lage

Gerade durch P mit Richtung $\vec{u}$: $g\colon \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ (r beliebige Zahl). Jedes r liefert einen Punkt der Geraden.



identisch | parallel | schneiden sich | windschief

Richtungen …	dann …
kollinear	Punktprobe: P auf h? ja → **identisch**, nein → **parallel**
nicht kollinear	gleichsetzen, LGS lösen: Lösung → **Schnittpunkt**, keine Lösung → **windschief**

Die Klausur-Falle

Beim Gleichsetzen zwei verschiedene Parameter nehmen (r und s). Mit demselben Buchstaben findet man fast nie den Schnittpunkt.

Flächen und Körper

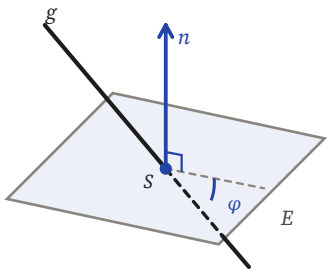
Figur	Formel
Dreieck ABC	$A = ½ \cdot \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{AC}\rvert \cdot \sin\alpha$ (α vorher mit dem Skalarprodukt)
Rechteck, Parallelogramm	A = Grundseite · Höhe; beim Rechteck vorher den rechten Winkel prüfen
Pyramide	$V = ⅓ \cdot G \cdot h$ (h = Abstand der Spitze von der Grundfläche)
Prisma, Quader	$V = G \cdot h$

Erst die Form beweisen

„Zeige, dass $ABCD$ ein Rechteck ist“: gegenüberliegende Seitenvektoren gleich und ein rechter Winkel.

Ebenen

- **Parameterform** (gA und eA): $E\colon \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$. Ein Punkt und zwei nicht kollineare Richtungen.
- **eA: Koordinatenform** $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$. Die Koeffizienten bilden den Normalenvektor $\vec{n}$. Er steht senkrecht auf der Ebene.
- Von Parameter- zu Koordinatenform: $\vec{n}$ mit $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ bestimmen, dann d durch Einsetzen von P.
- Spurpunkte: zwei Koordinaten null setzen. Fehlt eine Variable, ist die Ebene parallel zu dieser Achse.



Gerade g durchstößt die Ebene im Punkt S unter dem Winkel φ.

eA: Gerade und Ebene schneiden

Die Koordinaten der Geraden in die Koordinatenform einsetzen, nach r auflösen:

- genau eine Lösung → **Schnittpunkt** (r in die Gerade einsetzen)
- wahre Aussage wie $0 = 0$ → g **liegt in** E · falsche wie $0 = 5$ → **parallel**

Zwei Ebenen
Normalenvektoren kollinear → parallel oder identisch. Sonst schneiden sie sich in einer Geraden.

Winkel

zwischen	Formel	Merke
zwei Geraden	$\cos\varphi = \lvert\vec{u} \cdot \vec{v}\rvert \,/\, (\lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert)$	Betrag oben → Winkel ≤ 90°
Gerade und Ebene (eA)	$\sin\varphi = \lvert\vec{u} \cdot \vec{n}\rvert \,/\, (\lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{n}\rvert)$	**Sinus**, weil $\vec{n}$ senkrecht zur Ebene steht
zwei Ebenen (eA)	$\cos\varphi = \lvert\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}\rvert \,/\, (\lvert\vec{n_1}\rvert \cdot \lvert\vec{n_2}\rvert)$	Winkel der Normalenvektoren

eA: Abstände

Abstand heißt immer: **kürzester Weg, also senkrecht**.

- **Punkt–Ebene:** Lotgerade durch P mit Richtung $\vec{n}$, mit E schneiden → Lotfußpunkt F, Abstand = $\lvert\overrightarrow{PF}\rvert$.
- **Punkt–Gerade:** Punkt F auf g suchen, für den $\overrightarrow{PF} \cdot \vec{u} = 0$ gilt. Abstand = $\lvert\overrightarrow{PF}\rvert$.
- Parallele Ebenen oder Gerade parallel zu Ebene: einen Punkt nehmen, dann wie Punkt–Ebene.

Schneller Weg
Mit der Hesse'schen Normalenform: $d(P, E) = \lvert n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 - d\rvert \,/\, \lvert\vec{n}\rvert$

Typische Fehler

- Vektor als „Fuß minus Spitze" gebildet, das Vorzeichen ist dann falsch.
- Beim Gleichsetzen zweier Geraden denselben Parameter benutzt.
- Bei Gerade und Ebene cos statt sin genommen.
- Abstand schräg statt senkrecht gemessen.

Was dieser Zettel nicht kann
Er zeigt dir, worum es geht. Rechenwege übst du am besten an echten Abi-Aufgaben.

Weiter lernen

diese Themen gehören dazu

- **Vektoren und Skalarprodukt** · **Lage zweier Geraden** · **Ebenen**
- **Schnittwinkel** · **Abstände** (eA)

Alle Zettel kostenlos:

Link im TikTok-Profil

von randnotiz