Mathe · Überblick

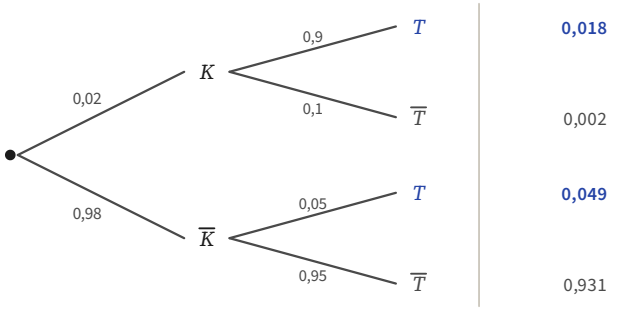
Stochastik

Alles Wichtige auf zwei Seiten · gA und eA

Im Abitur 2027

Niedersachsen erwartet ausdrücklich auch systematisches Zählen und Binomialkoeffizienten beim Ziehen ohne Zurücklegen. eA zusätzlich: Normalverteilung und Konfidenzintervalle.

Baumdiagramm und Vierfeldertafel



Test auf eine Krankheit: 2 % sind krank (K), der Test erkennt 90 % davon, schlägt aber auch bei 5 % der Gesunden an (T).

- **Pfadregel:** entlang eines Pfades multiplizieren, mehrere Pfade addieren.
- **Bedingt:** $P_A(B) = P(A \cap B) \,/\, P(A)$. Man schaut nur noch auf den Teil A.

	T	$\overline{T}$	Summe
K	18	2	20
$\overline{K}$	49	931	980
Summe	67	933	1000

Dieselbe Situation mit 1000 Personen. Mit ganzen Zahlen sieht man es sofort.

$P_T(K)$ ist nicht $P_K(T)$. Der Test erkennt 90 % der Kranken, aber von den positiv Getesteten sind nur 18 von 67 krank, also **etwa 27 %**.

Die Klausur-Falle

Immer zuerst fragen: Unter welcher Bedingung? Das steht hinter „von den …“.

Unabhängigkeit

A und B sind stochastisch unabhängig, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Gleichwertig: $P_A(B) = P(B)$, das Wissen über A ändert nichts.

Im Beispiel: $P(K \cap T) = 0{,}018$, aber $P(K) \cdot P(T) = 0{,}02 \cdot 0{,}067 \approx 0{,}0013$ → **abhängig**, zum Glück.

eA

Stochastisch abhängig heißt nicht, dass das eine das andere verursacht (kausal).

Zählen und Ziehen ohne Zurücklegen

- Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ = Anzahl der Möglichkeiten, k aus n auszuwählen (ohne Reihenfolge).
- Mit Zurücklegen und mit Reihenfolge: n^k Möglichkeiten.
- **Ohne Zurücklegen:** 5 rote und 3 grüne Kugeln, man zieht 3.
  $P(\text{genau 2 rot}) = \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} / \binom{8}{3} = 10 \cdot 3 / 56 \approx 0{,}54$

Merksatz

Günstige Auswahlen durch alle Auswahlen. Oben: „welche Roten“ mal „welche Grünen“.

Erwartungswert und Streuung

$$\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$$

- Der Wert, den man **im Mittel auf lange Sicht** erhält.
- Varianz $V(X)$ = Summe aus $(x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$, Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V(X)}$.
- Ein Spiel ist fair, wenn der erwartete Gewinn 0 ist. Einsatz vom Gewinn abziehen.

Typisch im Abi

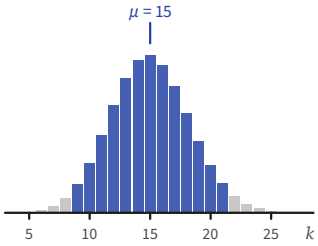
Glücksrad oder Würfelspiel: Tabelle mit Gewinn und Wahrscheinlichkeit, dann $E(X)$ ausrechnen und den fairen Einsatz bestimmen.

Binomialverteilung

n gleiche, unabhängige Versuche mit zwei Ausgängen, Trefferwahrscheinlichkeit p bleibt gleich. X = Anzahl der Treffer.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad \mu = n \cdot p,\ \sigma = \sqrt{(n \cdot p \cdot (1-p))}$$

im Text	rechnen
höchstens k	$P(X \le k)$
mindestens k	$P(X \ge k) = 1 - P(X \le k-1)$
mehr als k	$1 - P(X \le k)$



$n = 50$, $p = 0{,}3$: Gipfel bei $\mu = 15$. Blau: das 95-%-Prognoseintervall.

Prognoseintervall und Test auf Verträglichkeit

- 95-%-Prognoseintervall: $[\mu - 1{,}96\ \sigma\ ;\ \mu + 1{,}96\ \sigma]$. Dort liegt das Ergebnis mit etwa 95 % Wahrscheinlichkeit. Gilt gut, wenn $\sigma > 3$.
- Im Bild: $\sigma \approx 3{,}24$, also $[8{,}65\ ;\ 21{,}35]$, ganzzahlig 9 bis 21.
- **Verträglich?** Liegt das Stichprobenergebnis im Prognoseintervall zum vermuteten p, ist p mit der Stichprobe verträglich. Sonst nicht.

Falle Rundung

Das Intervall nach **innen** runden: untere Grenze auf, obere ab.

eA: Normalverteilung und Konfidenzintervall

- Stetige Zufallsgröße: Wahrscheinlichkeit = **Fläche unter der Glockenkurve**, einzelne Werte haben Wahrscheinlichkeit 0. Hochpunkt bei μ, Wendestellen bei $\mu \pm \sigma$.
- Binomialverteilung ≈ Normalverteilung mit gleichem μ und σ, wenn $\sigma > 3$.
- Konfidenzintervall: alle p, zu denen die beobachtete Trefferquote h im Prognoseintervall liegt: $|h - p| \le 1{,}96 \cdot \sqrt{(p(1-p)\ /\ n)}$

Prognose vs. Konfidenz

Prognose: p bekannt, Ergebnis gesucht. Konfidenz: Ergebnis bekannt, p gesucht.

Typische Fehler

- $P_A(B)$ und $P_B(A)$ verwechselt.
- „Mindestens 5“ als $1 - P(X \le 5)$ gerechnet, richtig ist $1 - P(X \le 4)$.
- Binomialverteilung benutzt, obwohl ohne Zurücklegen gezogen wird.

Was dieser Zettel nicht kann

Er zeigt dir, worum es geht. Rechenwege übst du am besten an echten Abi-Aufgaben.

Weiter lernen

diese Themen gehören dazu

- **Vierfeldertafel · Unabhängigkeit · Ziehen ohne Zurücklegen**
- **Erwartungswert · Binomialverteilung · Prognoseintervall**

Alle Zettel kostenlos:

Link im TikTok-Profil

von randnotiz